

基于稀疏重构的跳频信号时频分析方法

沙志超, 黄知涛, 周一宇, 王军华

(国防科学技术大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 针对现有时频分析方法存在噪声抑制能力弱、时频聚集性不强的缺点, 提出了一种基于稀疏重构的跳频信号时频分析方法来获取清晰的、高聚集度的时频图。首先根据惩罚函数的思想建立了跳频信号无约束的稀疏重构模型; 然后理论分析了惩罚函数因子的取值标准; 最后用近似 l_0 范数算法求解得出跳频信号的时频图。仿真结果表明该算法能够有效地获取跳频信号的时频图。

关键词: 跳频信号; 稀疏重构; 时频分析; 近似 l_0 范数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2013)05-0107-06

Time-frequency analysis of frequency-hopping signals based on sparse recovery

SHA Zhi-chao, HUANG Zhi-tao, ZHOU Yi-yu, WANG Jun-hua

(School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: To overcome the common shortcomings shared by the existing methods: weak suppression noise interference and feeble performance of time-frequency concentration, a novel time-frequency analysis method based on sparse representation was developed, which could get clear and concentrate time-frequency representation. Firstly, the unconstrained sparse representation model of FH signals was established according to the punish function theory. Then, the guideline of punish parameters were analysed theoretically and got time-frequency representation by solving the optimization problem used approximate l_0 norm finally. The simulation results show that this method is capable of getting clear time-frequency pattern.

Key words: frequency-hopping signals; sparse recovery; time-frequency analysis; approximate l_0 norm

1 引言

跳频技术具有良好的抗干扰性、低截获概率及多址组网能力, 已在军事和民用通信中得到广泛应用^[1]。在通信对抗和无线电监控领域, 跳频信号的检测与参数估计已成为研究的重点。

跳频信号是指发送信号的载波按照跳频序列进行跳变, 其具有时变、伪随机的载频, 属于典型的非平稳信号, 通常采用时频分析方法对其进行检测和参数估计。目前已有的时频分析方法包括线性变换和非线性变换^[2]。线性变换的时频分析方法包括短时傅立叶变换 (STFT, short time Fourier transform)、

Gabor 变换、小波变换及 S 变换等, 受不确定原理的制约, 其时间分辨率和频率分辨率不可兼得。非线性变换的时频分析方法以 Wigner-Ville 分布 (WVD) 为代表, 具有较高的时频分辨率, 但存在交叉项的干扰。平滑伪 Wigner-Ville 分布 (SPWVD) 能够抑制交叉项, 但是以损失时频分辨率为代价的。将上述时频分析方法用做跳频信号处理的文献较多, 其中文献[3~7]较为典型, 尽管一些复杂的时频分析方法提高了时频分布性能, 但仍存在噪声抑制能力弱, 时频分辨能力受限的缺点。文献[8]用稀疏线性回归的方法解决多个跳频信号同时存在时的跳频参数估计问题, 该文献把跳频信号表示成完备的傅立叶基

收稿日期: 2012-11-02; 修回日期: 2013-02-27

基金项目: 新世纪优秀人才支持计划基金资助项目 (NCET)

Foundation Item: The Program for New Century Excellent Talents in University of China (NCET)

之和的形式，附加跳频信号时频稀疏性约束，把跳频参数估计问题转换为稀疏求解问题，但因其计算量非常大，只能用于小样本情况。

为了在低信噪比情况下获取跳频信号清晰的、高聚集度的时频图，针对现有时频分析方法的不足，本文提出了一种基于稀疏重构的跳频信号时频分析方法。该方法具有良好的噪声和交叉项抑制能力，能够适应较低的信噪比，不仅适应于单网台信号，也适应于多网台信号。

2 跳频信号模型及稀疏重构原理

2.1 跳频信号模型

根据跳频信号产生原理，假设在观测时间 T 内有 M 个跳频信号进入接收机，本文采用如下符号来描述单天线接收的跳频信号。

$$y(t) = \sum_{m=1}^M s_m(t) + v(t) \quad (1)$$

其中， $y(t)$ 是接收的 M 个跳频信号与噪声的叠加， $s_m(t)$ 表示第 m 个跳频信号， $v(t)$ 表示零均值、方差为 σ^2 的加性高斯白噪声。对于第 m 个跳频信号，设其跳周期为 T_m ，在观测时刻 T 内共包含 K 个跳 (hop)，第 k 跳对应的载频为 f_{mk} ，起始跳的持续时长为 αT_m ，则 $s_m(t)$ 可以表示为

$$s_m(t) = a_m \sum_{k=0}^{K-1} \exp[j(2\pi f_{mk} t' + \phi_{mk})] \text{rect}\left(\frac{t'}{T_m}\right) \quad (2)$$

$$t' = t - (k-1)T_m - \alpha T_m$$

其中， a_m 是信号 $s_m(t)$ 的幅度， ϕ_{mk} 是第 k 个 hop 的初相， $\text{rect}(t)$ 表示单位矩形脉冲。接收的信号经过数字采样后的表达式为

$$s_m(nT_s) = a_m \sum_{k=0}^{K-1} \exp[j(\omega_{mk} n' + \phi_{mk})] \text{rect}\left(\frac{n'}{N_m}\right) \quad (3)$$

$$n' = n - (k-1)N_m - \alpha N_m$$

对应式(1)的含噪接收模型为

$$y(nT_s) = \sum_{m=1}^M s_m(nT_s) + v(nT_s) \quad (4)$$

其中， $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ， $N = \lfloor T/T_s \rfloor$ ， $\omega_{mk} = 2\pi f_{mk} T_s$ ，将式(14)表示为矢量形式

$$\mathbf{y} = \sum_{m=1}^M \mathbf{s}_m + \mathbf{v} \quad (5)$$

非协作跳频信号处理问题的目标就是在给定观测数据 $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}^T$ 情况下，获取跳频率集

$\{\omega_{mk}\}$ ，跳周期 T_m 等未知参数。

2.2 稀疏重构原理

考虑信号 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^P$ 在一组标准正交基 $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_P$ 上是 k 稀疏的，则信号可表示为

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^P \boldsymbol{\psi}_i \alpha_i \text{ 或 } \mathbf{y} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \quad (6)$$

其中， $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_P] \in \mathbb{C}^{P \times P}$ ， $\alpha_i = \langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}_i \rangle$ ， $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^P$ 包含 k 个非零系数。

当观测包含噪声时，式(6)可以改写为

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{v} \quad (7)$$

虽然式(7)可以用最小二乘求解，但观测数据中的噪声会影响求解的精度，进而影响真实频率检测。考虑跳频信号的稀疏性，求解式(7)可转化为稀疏重构问题(8)。

$$\begin{cases} \min_x \{\|\mathbf{x}\|_0\} \\ \text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (8)$$

3 基于稀疏重构的时频分析

当备选频率集已知且多普勒频率可以忽略时，可以设计有限频率集 \mathcal{W} ，使得接收跳频信号的频率集 $\{\omega_{mk}\} \subset \mathcal{W}$ 。当对接收信号频率没有先验知识时，可以按照要求的精度改变频段划分密度，把全部频段等间隔划分为 P 个频率^[8]。根据时间精度需求将接收的信号 \mathbf{y} 等间隔划分为 K 段长度为 P 的数据 \mathbf{y}_i (可以不重叠)。

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(iL : iL + P - 1) \quad (9)$$

其中， L 表示分段间隔，则 $K = \lfloor \frac{(N-P)}{L} \rfloor$ 。将 \mathbf{y}_i 依次按列组成数据观测矩阵

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{K-1}] \quad (10)$$

当 $\{\omega_{mk}\} \subset \mathcal{W}$ 时，观测矩阵表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}\mathbf{X} + \mathbf{V} \quad (11)$$

其中， \mathbf{W} 是由频率集 \mathcal{W} 构成的傅立叶正交基^[9]， $\mathbf{W} = [\boldsymbol{\omega}_0, \dots, \boldsymbol{\omega}_{P-1}]$ ， $\boldsymbol{\omega}_i = [e^{j\omega_i 1}, \dots, e^{j\omega_i P}]^T$ ， \mathbf{X} 是表示观测矩阵时频分布的矩阵， \mathbf{V} 表示观测噪声矩阵， $\mathbf{X}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{P \times K}$ 。

根据跳频信号的时频稀疏性质可知，矩阵 \mathbf{X} 中对应跳频信号的时频点是稀疏的，又因为非零点都集中在跳频信号频点对应的行上，所以矩阵 \mathbf{X} 又是

行稀疏的。因此可以构造带罚函数的无约束最优化函数

$$L(\mathbf{X}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{W}\mathbf{X}\|_F^2 + \mu_1 \|\mathbf{X}\|_0 + \mu_2 \|\mathbf{X}\|_{2,0}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{P \times K}} [L(\mathbf{X})] \quad (12)$$

$L(\mathbf{X})$ 的第一项代表 \mathbf{X} 对观测数据 \mathbf{Y} 的逼近程度, μ_1 和 μ_2 分别代表 \mathbf{X} 矩阵点稀疏和行联合稀疏的惩罚因子。噪声的抑制能力依靠 μ_1 和 μ_2 调节, 行联合稀疏限制非跳频频率集行时频点的幅度趋于 0, 点稀疏则限制不对应跳频信号的时频点处幅度趋于 0。式(12)是一个非凸优化求解问题, 文献[10]中用近似 l_0 范数 (AL0) 方法求解该类问题。当 $\mu_1 = 0$ 时式(12)表示常见的多观测联合稀疏求解问题, 当 $\mu_2 = 0$ 时式(12)仅考虑单个时频点对观测数据的影响和稀疏度之间的平衡。 μ_1 和 μ_2 的取值过小则噪声抑制能力弱, 取值过大会削弱真实信号处的幅度, 因此其合理取值非常关键。在介绍 AL0 算法前, 本文首先分析 μ_1 和 μ_2 的取值准则, 在分析时不考虑噪声的影响, 且频率集包含在字典集中。

3.1 μ_1 取值分析

式(12)的 $L(\mathbf{X})$ 可以表示为

$$L(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^K (\|\mathbf{y}_k - \mathbf{W}\mathbf{x}_k\|_2^2 + \mu_1 \|\mathbf{x}_k\|_0) + \mu_2 \|\mathbf{X}\|_{2,0} \quad (13)$$

假设 $\mu_2 = 0$, 令

$$g(\mathbf{x}_k) = \|\mathbf{y}_k - \mathbf{W}\mathbf{x}_k\|_2^2 + \mu_1 \|\mathbf{x}_k\|_0 \quad (14)$$

则有

$$L(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^K g(\mathbf{x}_k) \quad (15)$$

\mathbf{X} 使 $L(\mathbf{X})$ 最小等价于 $\mathbf{X}_k = \arg \min_{\mathbf{x}_k} g(\mathbf{x}_k)$ 。

所以可以参照式(14)来分析 μ_1 取值。

结论 1 信号幅度为 1 时, $\mu_1 < P$ 是保证真实的时频点处非零的必要条件。

证明 假设观测数据段 $\mathbf{y}_k = \exp(j2\pi\omega_p t + j\varphi)$ 。当 $\|\mathbf{X}_k\|_0 = 0$ 时, 即 $\mathbf{X}_k = 0$, 此时 $g(\mathbf{X}_k) = \|\mathbf{y}_k\|_2^2 = P$; 当 $\|\mathbf{X}_k\|_0 \neq 0$ 时, 容易证明存在 $\mathbf{X}_k(i) = \begin{cases} e^{j\varphi}, & i = p \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 使得 $g(\mathbf{X}_k) = \min_{\|\mathbf{x}_k\|_0 \neq 0} g(\mathbf{x}_k) = \mu_1$ 。若要保证真实的时频点处非零, 等价于 $\min_{\|\mathbf{x}_k\|_0 \neq 0} g(\mathbf{x}_k) - \min_{\|\mathbf{x}_k\|_0 = 0} g(\mathbf{x}_k) < 0$, 即

$$\mu_1 - P < 0 \quad (16)$$

故 $\mu_1 < P$ 。得证。

当观测数据段 \mathbf{y}_k 中包含频率跳变点时, 在估计时频分布时希望用持续时间较长频率来代表该段数据的频率。设 \mathbf{y}_k 的前 L 个点对应频率 ω_{p_1} , 后 $P-L$ 个点对应频率 ω_{p_2} , 即

$$\mathbf{y}_k(p) = \begin{cases} \exp[j(2\pi\omega_{p_1} p + \varphi_1)], & 0 < p \leq L \\ \exp[j(2\pi\omega_{p_2} p + \varphi_2)], & L < p \leq P \end{cases} \quad (17)$$

其中, φ_1, φ_2 表示相位, 不失一般性假设 $L \geq \frac{P}{2}$ 。

若要此时频率近似为 ω_{p_1} , 则要求

$$\begin{cases} \min_{\|\mathbf{x}_k\|_0=1} g(\mathbf{x}_k) - \min_{\|\mathbf{x}_k\|_0=0} g(\mathbf{x}_k) \leq 0 \\ \min_{\|\mathbf{x}_k\|_0=1} g(\mathbf{x}_k) - \min_{\|\mathbf{x}_k\|_0=2} g(\mathbf{x}_k) \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

其中,

$$\min_{\|\mathbf{x}_k\|_0=0} g(\mathbf{x}_k) = P \quad (19)$$

$$\min_{\|\mathbf{x}_k\|_0=1} g(\mathbf{x}_k) = \min(g_{11} + g_{12}) + \mu_1$$

$$g_{11} = \sum_{p=1}^L (1-a)^2$$

$$g_{12} = \sum_{p=L+1}^P \left\{ 1 + a^2 - 2a \cos[(\omega_{p_1} - \omega_{p_2})p + \Delta\varphi] \right\} \quad (20)$$

$$\min_{\|\mathbf{x}_k\|_0=2} g(\mathbf{x}_k) = \min(g_{21} + g_{22}) + 2\mu_1$$

$$g_{21} = \sum_{p=1}^L \left\{ (1-a)^2 + b^2 - 2(1-a)b \cos[(\omega_{p_1} - \omega_{p_2})p + \Delta\varphi] \right\}$$

$$g_{22} = \sum_{p=L+1}^P \left\{ (1-b)^2 + a^2 - 2(1-b)a \cos[(\omega_{p_1} - \omega_{p_2})p + \Delta\varphi] \right\} \quad (21)$$

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, 式(20)中 $\mathbf{X}_k(p_1) = ae^{j\varphi_1}$, $\mathbf{X}_k(p_2) = 0$; 式(21)中 $\mathbf{X}_k(p_1) = ae^{j\varphi_1}$, $\mathbf{X}_k(p_2) = be^{j\varphi_2}$ 。因为 $\Delta\varphi$ 值与每跳初始相位有关,

当 $(\omega_1 - \omega_2)L > 2\pi$ 时 $\sum_{p=1}^L \{\cos[(\omega_1 - \omega_2)p + \Delta\varphi]\} \approx 0$,

因此可以忽略式(20)、式(21)中余弦项的影响, 当 $\frac{\partial g(\mathbf{x}_k)}{\partial a} = 0, \frac{\partial g(\mathbf{x}_k)}{\partial b} = 0$ 时, 式(20)、式(21)取最小值, 经计算得

$$\min_{\|\mathbf{x}_k\|_0=1} g(\mathbf{x}_k) = \frac{(P^2 - L^2)}{P} + \mu_1 \quad (22)$$

$$\min_{\|\mathbf{x}_k\|_0=2} g(\mathbf{x}_k) = \frac{L(P-L)}{P} + 2\mu_1 \quad (23)$$

根据式(18)的要求得

$$\begin{cases} \frac{(P^2 - L^2)}{P} + \mu_1 \leq P \\ \frac{(P^2 - L^2)}{P} + \mu_1 \leq \frac{L(P-L)}{P} + 2\mu_1 \end{cases} \quad (24)$$

因为 $L > \frac{P}{2}$, 故式(24)等价于

$$\mu_1 \leq \frac{P}{4} \text{ 且 } \mu_1 \geq \frac{P}{4} \quad (25)$$

经过以上推导可得结论 2。

结论 2 样当观测数据段 \mathbf{y}_k 中包含频率跳变点时, 如果在估计时频分布时希望仅用持续时间较长频率来代表该段数据的频率, μ_1 的最优取值为 $\frac{P}{4}$ 。

实际上 $\sum_{p=1}^L \{\cos[(\omega_1 - \omega_2)p + \Delta\phi]\}$ 的值在一定范围内变化, 可正可负, 受该项影响, 并不能保证仅用持续时间较长频率来代表该段数据的频率, 所以该方法在跳变点估计时会存在一定误差。综合结论 1 和结论 2 可知, 为了提高跳变点的估计精度, μ_1 的最优取值为 $\frac{P}{4}$ 。

3.2 μ_2 取值分析

假设 $\mu_1 = 0$, 令

$$g(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^K (\|\mathbf{y}_k - \mathbf{W}\mathbf{x}_k\|_2^2) + \mu_2 \|\mathbf{X}\|_{2,0} \quad (26)$$

从式(26)可以看出, μ_2 是矩阵 \mathbf{X} 行向量 2 范数的约束因子, 与 \mathbf{X} 中非零行数有关但与非零行内的非零个数无关。设矩阵 \mathbf{X} 第 p 行包含 K' 个真实时频点对应的元素, 若要保证该行元素非零则要求

$$\min_{\|\mathbf{x}\|_{2,0}=1} g(\mathbf{x}_k) - \min_{\|\mathbf{x}\|_{2,0}=0} g(\mathbf{x}_k) < 0 \quad (27)$$

因为 $\min_{\|\mathbf{x}\|_{2,0}=0} g(\mathbf{x}_k) \approx K'P$, $\min_{\|\mathbf{x}\|_{2,0}=1} g(\mathbf{x}_k) \approx \mu_2$, 所以式(27)要求, $\mu_2 < K'P$ 。实际中考虑到噪声的影响, 可根据实际情况设定 $\mu_2 = \alpha K'P$, $\alpha \in [0.2 \ 0.7]$, K' 为单个频率上跳频信号的持续时长。

4 近似 l_0 范数算法原理

现有较为成熟的稀疏信号重构方法中, 近似 l_0 范数 (AL0) 方法具有需要样本少, 分辨精度高且计算量小的优点^[10,11]。AL0 采用平滑的高斯函数近似 l_0 范数, 然后通过最速下降法求解近似 l_0 范数重构稀疏信号。

AL0 算法引入高斯函数来近似 l_0 范数

$$f_\delta(s) = \exp\left(-\frac{s^2}{2\delta^2}\right) \quad (28)$$

当 δ 近似为 0 时, 有

$$N - \sum_{i=1}^N f(x_i) \approx \|\mathbf{x}\|_0 \quad (29)$$

因此, 利用式(29)近似 l_0 范数来表示信号 \mathbf{x} 的稀疏性, 则单观测稀疏重构问题可转化为求解高斯和函数的最小化问题

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} F_\delta(\mathbf{x}) = N - \sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{|x_i|^2}{2\delta^2}\right) \\ \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \end{cases} \quad (30)$$

考虑引入罚函数因子 λ 把带约束的 l_0 范数最小问题通过转化为无约束最优化问题, 然后用最速下降法求解。无约束最优化问题可表示为

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \left\{ L(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \left(n - \sum_{i=1}^n f_\delta(x_i) \right) \right\} \quad (31)$$

最速下降方向为目标函数 $L(\mathbf{x})$ 的共轭梯度方向^[11], 复数变量 \mathbf{x} 的共轭梯度定义为

$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_R} + i \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_I} \right) \quad (32)$$

其中, \mathbf{x}_R 和 \mathbf{x}_I 分别表示复数向量 \mathbf{x} 的实部和虚部, \mathbf{x}^* 为 \mathbf{x} 的共轭。则 $L(\mathbf{x})$ 的共轭梯度方向 $\nabla L(\mathbf{x})$ 为

$$\nabla L(\mathbf{x}) = \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^*} = \lambda \frac{\partial F_\delta(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^*} + \frac{\partial (\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2)}{\partial \mathbf{x}^*} \quad (33)$$

由 $F_\delta(x)$ 表达式, 可得

$$\frac{\partial F_\delta(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_R} = \mathbf{A}\mathbf{x}_R \quad (34)$$

$$\frac{\partial F_\delta(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_I} = \mathbf{A}\mathbf{x}_I \quad (35)$$

其中，对角阵 $A_{i,i} = \exp\left(\frac{-|x_i|^2 / 2\delta^2}{\delta^2}\right)$ 。

根据 $\|Ax - y\|_2^2 = (Ax - y)^H (Ax - y)$ ，可得

$$\frac{\partial \|Ax - y\|_2^2}{\partial x_R} = 2 \operatorname{Re}[A^H (Ax - y)] \quad (36)$$

$$\frac{\partial \|Ax - y\|_2^2}{\partial x_I} = 2 \operatorname{Im}[A^H (Ax - y)] \quad (37)$$

将式(34)~式(37)代入式(33)可得

$$\nabla L(x) = \frac{1}{2} \lambda Ax + A^H (Ax - y) \quad (38)$$

计算式(13)中 $L(X)$ 共轭梯度方向

$$\nabla L(X) = A^H (AX - Y) + \frac{1}{2} \lambda_1 A_1 \odot X + \frac{1}{2} \lambda_2 A_2 X \quad (39)$$

其中， $A_1 = f_\delta(X) / \delta^2$ ； A_2 为对角阵，第 n 个对角

元素为 $\exp\left(\frac{-\|X_n\|_2^2 / 2\delta^2}{\delta^2}\right)$ 。AL0 算法的详细步骤参照图 1，依次取 $\delta = [2, 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05]$ 。

```

输入：矩阵 A，测量值向量 y
算法步骤：
step1 令初始值  $x^{(0)}$  为  $y = Ax$  的最小二乘解，
      即  $x^{(0)} = A^T (AA^T)^{-1} y$ ；
Step2 选择一组下降序列  $[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_J]$ ；令收敛准则
      为  $\varepsilon$ ，选择参数  $\lambda$ ；
Step3 算法迭代：
      for  $j = 1, 2, \dots, J$ 
          令  $\delta = \delta_j$ 
Step4 用最速下降法最小化函数  $F_\delta(x)$ 
      while  $\operatorname{norm}(\nabla L(x)) > \delta_j \varepsilon$ 
          确定步长  $u$  使得：
           $F_\delta(x - u \nabla L(x)) < F_\delta(x)$ ；
          沿梯度方向更新：
           $x = x - u \nabla L(x)$ ；
      end
      令  $x^{(j)} = x$ 
end
step5 输出结果： $\hat{x} = x^{(J)}$ 
    
```

图 1 含噪 AL0 算法

5 算法仿真

本节将通过仿真验证 AL0 算法在求解跳频信号时频图时的有效性。仿真 1 以单跳频信号为例，在 0dB 和 -5dB 时分别比较本文方法获取时频图与 STFT 方法、WVD 方法、SPWVD 方法做比较，说明本文算法的优势。仿真 2 是以多跳频信号为目标，

证明本文算法能够适应多网台情况。

仿真 1 单跳频信号时频分析仿真

频率集个数 $P = 64$ ，网格均匀划分，频率集 $W = \left\{2\pi \frac{p}{P}\right\}, p = 1, 2, \dots, P$ 。观测数据采样点长度为 1 000，跳频周期为 300 点，第一跳的持续时长为 200 点，各跳的频率依次为 $[W(10), W(15), W(8), W(12)]$ 。第一跳的对应的数据可表示为

$$s(t) = a \exp[jW(10)t + j\phi], \quad t = 1, \dots, 200 \quad (40)$$

改变式(40)中时间、频率和初相的取值即可表示其他跳数据，本文仿真中取 $a = 1$ ， $\phi \in [0, 2\pi]$ 随机取值。

信噪比为 0dB 时本文方法和其他 3 种方法得到的时频图如图 2 所示。降低信噪比为 -5dB，各种方法时频分析效果如图 3 所示。

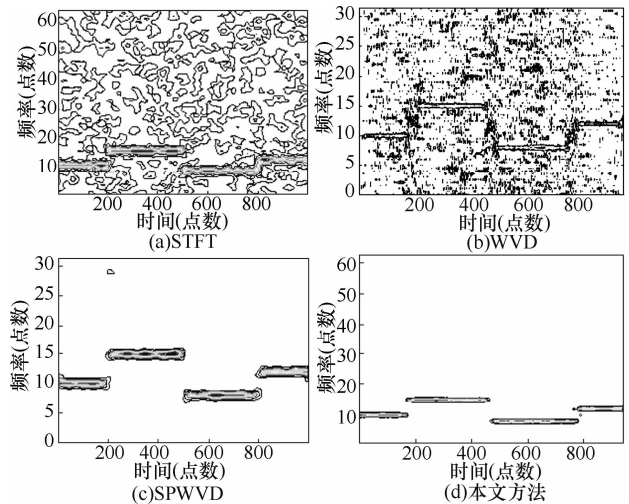


图 2 信噪比为 0dB 时单个跳频信号时频分析结果

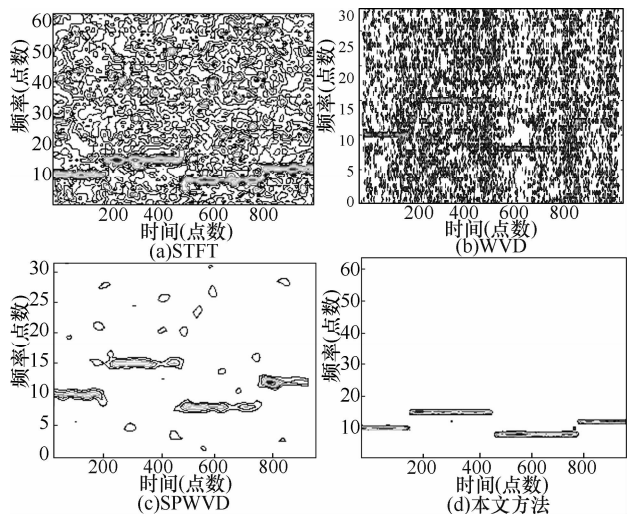


图 3 信噪比为 -5dB 时单跳频信号时频分析结果

仿真 2 多跳频信号时频分析仿真

在仿真 1 的基础上在增加一个跳频信号，跳频周期为 300 点，第一条的持续时长为 100 点，各跳的频率依次为 $[W(8), W(18), W(10), W(15)]$ 。信噪比为 0dB，3 种方法时频分析效果如图 4 所示。

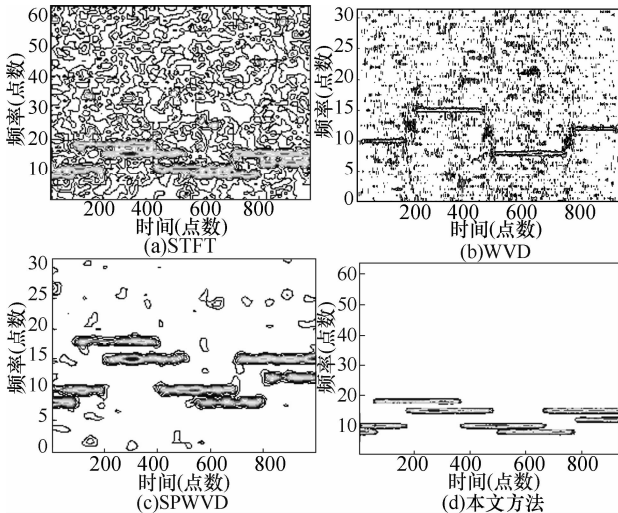


图 4 信噪比为 0dB 时多跳频信号时频分析结果

从以上 2 组仿真的结果可以看出本文方法性能明显优于现有时频分析方法，获得的时频图不仅能够抑制噪声和交叉项的影响，且能够适应多信号。利用本文方法获取的时频图可以更好地完成跳频信号的检测和参数估计。

6 结束语

本文的重点在于提出了一种基于稀疏重构的跳频信号时频分析方法，该方法充分利用跳频信号的时频稀疏特性，将跳频信号的时频分析问题转换为用 l_0 算法求解稀疏重构问题。试验结果表明本文方法能够很好地抑制噪声和交叉项的影响，在低信噪比情况下获取清晰、高聚集度的时频图，且能适应多网台跳频信号，时频分析结果较常规方法具有明显优势。另外，本文方法也可应用于压缩采样的跳频数据，在压缩采样情况下的分析效果有待进一步研究。

参考文献:

[1] TORRIERI D J. Mobile frequency-hopping CDMA systems[J]. IEEE Trans Communication, 2000, 48(8): 1318-1327.
 [2] 张贤达, 保铮. 非平稳信号分析与处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998. 20-70.
 ZHANG X D, BAO Z. Nonstationary Random Signal Analysis and Processing[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1998. 20-70.
 [3] BARBAROSSA S, SCAGLIONE A. Parameter estimation of spread

spectrum frequency hopping signals using time-frequency distributions[A]. First IEEE Signal Processing Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications[C]. Paris, France, 1997. 213-216.
 [4] 赵俊, 张朝阳, 赖利峰. 一种基于时频分析的跳频信号参数盲估计方法[J]. 电路与系统学报, 2003, 8(3): 46-50.
 ZHAO J, ZHANG C Y, LAI L F, et al. Blind parameter estimation of frequency-hopping signals based on time-frequency analysis[J]. Journal of Circuits and Systems, 2003, 8(3): 46-50.
 [5] 张曦, 杜兴民, 朱礼亚. 基于重排 SPWVD 的跳频信号参数提取方法[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(15): 144-147.
 ZHANG X, DU X M, ZHU L Y. Blind parameters extraction of frequency-hopping signals based on reassignment SPWVD[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(15): 144-147.
 [6] CHEN T C. Joint signal parameter estimation of frequency-hopping communications[J]. IET Communications, 2012, 6(4):381-389.
 [7] LEI Y K, ZHONG Z F, WU Y H. A new hop duration blind estimation algorithm for frequency-hopping signals[A]. 2008 IEEE Pacific-Asia Workshop on Computational Intelligence and Industrial Application[C]. Wuhan, China, 2008. 695-699.
 [8] ANGELOSANTE D, GIANNAKIS G B, SIDIROPOULOS N D. Estimating multiple frequency-hopping signal parameters via sparse linear regression[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(10): 5044-5056.
 [9] STOICA P, LI J, LING J. Missing data recovery via a nonparametric iterative adaptive approach[J]. IEEE Signal Process Letters, 2009, 16(4): 241-244.
 [10] 王军华, 黄知涛, 周一宇等. 基于近似 l_0 范数的稳健稀疏信号重构算法[J]. 电子学报, 2012, 40(6):1185-1189.
 WANG J H, HUANG Z T, ZHOU Y Y, et al. Robust sparse recovery based on approximate l_0 norm[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(6): 1185- 1189.
 [11] MOHIMANI G H, ZADEH M B, JUTTEN C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed l_0 norm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(1): 289-301.

作者简介:



沙志超 (1985-), 男, 河北沧州人, 国防科学技术大学博士生, 主要研究方向为通信信号侦察处理、综合电子战技术等。

黄知涛 (1976-), 男, 湖北荆州人, 博士, 国防科学技术大学教授、博士生导师, 主要研究方向为航天侦察信息处理、雷达/通信信号处理、综合电子战技术等。

周一宇 (1948-), 男, 湖南长沙人, 博士, 国防科学技术大学教授、博士生导师, 主要研究方向为综合电子战系统与、无源定位与跟踪技术、空间信息对抗技术等。

王军华 (1980-), 男, 江西景德镇人, 国防科学技术大学博士生, 主要研究方向为压缩感知、稀疏重构、阵列信号处理。